CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a IX-a

1. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - a$, $a \in (0, \infty)$.

1) Demonstraţi că soluţiile ecuaţiei $\left||f(x)| - 2a\right| = 2a, a \in (0, \infty)$ sunt în progresie aritmetică.

2) Demonstraţi că dacă există u şi v diferite astfel încât $|f(u) - f(v)| \le 2$, atunci $|u - v| \le 1$.

3) Demonstraţi că dacă M este o mulţime cu 3 elemente astfel încât $M \subset [2010, 2012]$ atunci există cel puţin două elemente x şi y aparţinând mulţimii M astfel încât $|f(x) - f(y)| \le 2$

2. Avem la dispoziţie 2012 pătrate 3×3, împărţite fiecare în câte 9 „pătrăţele” 1×1 prin drepte paralele cu laturile pătratului iniţial şi notate $P_1, P_2, ..., P_{2012}$. În fiecare dintre pătratele iniţiale se completează pătrăţelele din colţuri şi apoi cel din centru, începând cu pătrăţelul din colţul dreapta jos, în sens trigonometric, cu numerele naturale nenule distincte, în ordinea naturală (1, 2, 3, …).
a) Ce număr se va afla în centrul pătratului P_3 ?
b) Câte numere naturale se vor utiliza pentru completarea celor 2012 pătrate iniţiale ?
c) Care este poziţia pe care se va afla numărul 2012 ?

3. a) În paralelogramul ABCD cunoaştem că $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right|$.

Demonstraţi că paralelogramul este un dreptunghi.

b) Demonstraţi că în orice triunghi are loc inegalitatea $\frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c} \ge 6$, unde a, b, c reprezintă lungimile laturilor triunghiului iar p este semiperimetrul triunghiului.

4. O tablă dreptunghiulară este tăiată, prin drepte paralele la laturi, în patru bucăţi având ariile S_1, S_2, S_3, S_4 (vezi figura alăturată).
a) Demonstraţi că $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$
b) Cunoscând că $S_2 = 300cm^2$, $S_3 = 180cm^2$, $S_4 = 120cm^2$, determinaţi suprafaţa iniţială a tablei.

S_1	S_2
S_4	S_3

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a X-a

1. a) Să se demonstreze că funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5^x+\lg x$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$.

b) Comparaţi numerele $a=\sqrt{5}-\lg 2$ şi $b=\sqrt[3]{5}-\lg 3$.

2. Ştefan vrea să citească o carte care are 381 de pagini. El îşi propune să citească în prima zi un număr întreg de pagini, apoi în fiecare zi, să citească un număr de pagini egal cu dublul numărului de pagini citite în ziua precedentă. Câte pagini a citit în prima zi şi în câte zile a terminat de citit cartea, ştiind că a citit cel puţin două zile ?

3. Se consideră numărul $a=\left(z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, unde z este un număr complex de modul 1.

a) Să se demonstreze că $a=\left|z+\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2$.

b) Determinaţi valoarea maximă a numărului a .

c) Determinaţi numărul complex z, pentru care a=4.

4. Fie sumele următoare: $S_1=C_{100}^0+2C_{100}^2+2^2C_{100}^4+\ldots 2^{50}C_{100}^{100}$ şi

$S_2=C_{100}^1+2C_{100}^3+2^2C_{100}^5+\ldots 2^{49}C_{100}^{99}$

a) Demonstraţi că $\left(1+\sqrt{2}\right)^{100}=S_1+\sqrt{2}S_2$.

b) Să se demonstreze că $0<S_1-\sqrt{2}S_2<\frac{1}{2^{100}}$.

c) Calculaţi $\left[10^{30}\left(S_1-\sqrt{2}S_2\right)\right]$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a XI a

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}7 & 10\\ -5 & -8\end{pmatrix}$.

a) Să se verifice egalitatea $C = A \cdot B \cdot A^{-1}$.

b) Să se determine matricea B^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Să se determine matricea C^n, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

2. O unitate economică ce produce frigidere are costuri fixe anuale de 10000€ la care se adaugă câte 200 € pentru fiecare frigider produs. Preţul cu care fabricantul vinde un frigider este de 350€. Notăm cu f(n) suma, în euro, cheltuită pentru producerea a n frigidere şi cu g(n) suma, în euro, ce revine ca beneficiu fabricantului după ce vinde n frigidere.

a) Calculaţi f(100), f(200) şi determinaţi formula pentru f(n).

b) Demonstraţi că $g(60) < 0$, iar $g(70) > 0$ şi interpretaţi rezultatele, din punct de vedere al rentabilităţii activităţii.

c) Dacă fabricantul şi-a propus să realizeze un profit anual de cel puţin 30000€, ce număr de frigidere ar trebui să producă şi să comercializeze ?

3. Notăm cu $\mathcal{M}$ mulţimea matricelor de ordinul al treilea care au toate elementele numere naturale, pe diagonala secundară au mereu numărul 1, iar suma elementelor de pe oricare linie sau coloană este 2012.

a) Daţi exemplu de o matrice din mulţimea $\mathcal{M}$.

b) Care este numărul elementelor mulţimii $\mathcal{M}$? Justificaţi răspunsul.

c) Stabiliţi dacă există matrice inversabile în mulţimea $\mathcal{M}$, care să aibă inversa tot în mulţimea $\mathcal{M}$.

4. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)\cdot e^{-x}$.

a) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\left(-f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$

b) Determinaţi numărul tangentelor la graficul funcţiei care trec prin originea sistemului de axe.

c) Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $f^{(n)}(0)<3$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*

CONCURSUL NAŢIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
"ADOLF HAIMOVICI"
ETAPA NAŢIONALĂ - 20 aprilie 2012
Filiera tehnologica : profil tehnic

Clasa a XII-a

1. Două lentile având distanţele focale f_1, respectiv f_2 sunt situate la distanţa $d > 0$ una faţă de cealaltă. În această situaţie distanţa focală f a sistemului este dată de legea de compoziţie:

$$f = f_1 \circ f_2 = \frac{f_1 \cdot f_2}{f_1 + f_2 - d}$$

Considerând legea de compoziţie definită pe mulţimea $G = (0, \infty)$, se cere:

a) Demonstraţi că legea este asociativă .

b) Cercetaţi dacă legea admite element neutru .

c) Calculaţi $\frac{d}{8} \circ \frac{d}{4} \circ \frac{d}{2} \circ d \circ (2d) \circ (4d) \circ (8d)$.

2. Se consideră $I(a) = \int_1^3 \frac{1}{|x-a|+1} dx$, unde $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se calculeze I(1) ;

b) Să se demonstreze că I(2) = 2ln2 ;

c) Calculaţi $\lim_{a \to \infty} I(a)$.

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} \hat{3} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{2} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ având elementele din inelul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi mulţimea

$C(A) = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_7) \mid A \cdot X = X \cdot A\}$

a) Determinaţi n - minim cu proprietatea $A^n = I_3$.

b) Determinaţi forma matricelor din mulţimea C(A).

c) Câte matrice din C(A) au determinantul egal cu $\hat{0}$?

4. Se consideră funcţia $f : (0,3) \to \mathbb{R}, f(x) = \arcsin\left(\frac{2x-3}{3}\right) + 2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{3-x}{x}}\right)$

a) Să se determine f'(x).

b) Să se determine acea primitivă F a funcţiei f pentru care $F(1) = \frac{3\pi}{2}$.

Notă: *Timp de lucru 4 ore; Toate subiectele sunt obligatorii; Fiecare subiect este notat cu punctaje de la 0 la 7.*